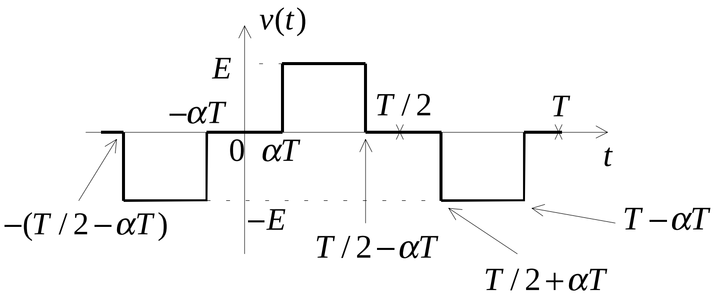
-EXERCICE 0 bis.3-

• ENONCE :

« Analyse d'un signal rectangulaire avec paliers nuls »

1) On considère la tension ci-dessous :

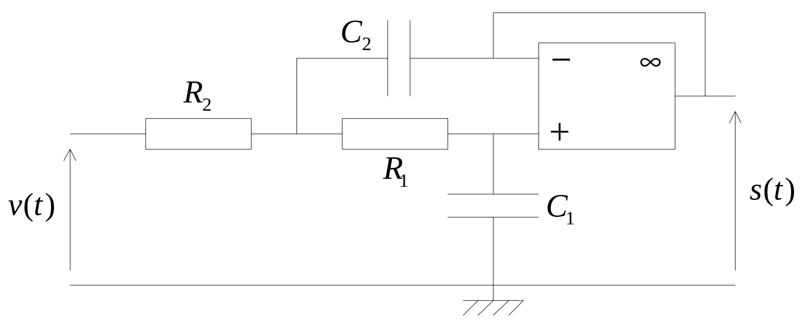


Donner le développement en série de Fourier de la tension $v(t)$.

2) Pour quelle valeur de α la tension $v(t)$ est-elle la « plus sinusoïdale » ?

On prendra cette expression imagée dans le sens suivant: pour quelle valeur de α le taux d'harmoniques de rang supérieur à 1 est-il le plus faible ? On gardera cette valeur par la suite.

3) On considère le montage suivant :



L'A.O utilisé est **parfait**, et fonctionne en **linéaire**.

a) Mettre la fonction de transfert du montage sous la forme : $\underline{H}(jx)=\dfrac{\underline{s}}{\underline{v}}=\dfrac{1}{1-x^2+2j\alpha x}$

avec : $x=\dfrac{\omega}{\omega_0}$; on exprimera α et ω_0 en fonction des éléments du montage.

b) On souhaite que : $|\underline{H}|=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$; calculer la valeur de α permettant d'obtenir ce résultat. Quel en est l'intérêt ?

c) On a $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=10^{-3}s$; comment choisir ω_0 pour obtenir une tension de sortie $s(t)$ quasi-sinusoïdale de fréquence $1\,KHz$? De combien est atténué l'harmonique de rang 5 ?

• CORRIGE :

« Analyse d'un signal rectangulaire avec paliers nuls »

1) La tension $v(t)$ peut s'écrire : $v(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right)$, avec $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.

• Compte tenu de l'égalité des aires positives et négatives, la **valeur moyenne** de $v(t)$ est **nulle** $\Rightarrow \boxed{\dfrac{a_0}{2}=0}$.

• La fonction $s(t)$ étant **impaire**, tous les coefficients a_n sont **nuls**.

• La symétrie de **glissement** permet d'affirmer que les termes **pairs** du développement sont **nuls**, et que l'on peut simplifier le calcul des coefficients impairs selon :

$$b_n=b_{2k+1}=\frac{4}{T}\times\int_0^{T/2}v(t)\sin[(2k+1)\omega t]dt=\frac{4E}{T}\times\int_{\alpha T}^{T/2-\alpha T}\sin[(2k+1)\omega t]dt=\frac{4E}{(2k+1)\omega T}\times\left[\cos[(2k+1)\omega t]\right]_{T/2-\alpha T}^{\alpha T}$$

$\Rightarrow$ compte tenu de $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, on obtient :

$$\boxed{b_{2k+1}=\frac{4E}{(2k+1)\pi}\cos[(2k+1)2\pi\alpha]}$$

2) L'amplitude des harmoniques décroissant en $1/n$, c'est l'harmonique de rang 3 qui, en dehors du fondamental, a le plus de « poids » ; il faut donc l'éliminer en écrivant :

$b_3=0 \Rightarrow \cos(6\pi\alpha)=0 \Rightarrow$ la plus petite valeur de α est donnée par $6\pi\alpha=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha=\dfrac{1}{12}}$

Rq : l'harmonique suivant le fondamental sera donc l'harmonique de rang 5.

3) a) Le théorème de Millman appliqué au point A, situé entre R_1 et R_2, fournit :

$$\underline{v}_A=\frac{\dfrac{\underline{v}}{R_2}+\dfrac{\underline{s}}{R_1}+jC_2\omega\underline{s}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+jC_2\omega}\qquad(1)$$

• Le même théorème appliqué sur l'entrée + de l'A.O donne : $\underline{v}_+=\dfrac{\dfrac{\underline{v}_A}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1}+jC_1\omega}$ (2)

• L'A.O étant en régime de fonctionnement linéaire, il vient :

$\underline{v}_+=\underline{v}_-=\underline{s} \Rightarrow$ il suffit alors d'éliminer $\underline{v}_A$ entre les relations (1) et (2), ce qui conduit à :

$$\boxed{\underline{H}=\frac{\underline{s}}{\underline{v}}=\frac{1}{1-R_1R_2C_1C_2\omega^2+j(R_1+R_2)C_1\omega}} \Rightarrow \boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}} \text{ et } \boxed{\alpha=\frac{(R_1+R_2)C_1\omega_0}{2}}$$

b) On souhaite que : $|\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} \Rightarrow x^2(4\alpha^2 - 2) = 0$, $\forall x$; d'où :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Rq : on obtient alors un **filtre passe-bas**, de pulsation de coupure ω_0, et d'asymptote de pente $-40\ dB/\text{décade}$; surtout, comme il n'y a pas de terme du second degré (en x^2), ce type de filtre se comporte comme un second ordre immédiatement après ω_0, sans commencer par une pente de $-20\ dB/\text{décade}$.

c) La fréquence de coupure $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ doit être légèrement supérieure à la fréquence du fondamental de $v(t)$, soit $f = \dfrac{1}{T} = 10^3 Hz$.

• Pour simplifier, prenons $f_0 = 1KHz$; l'harmonique de rang 5 de la tension $v(t)$ possède une fréquence $f_5 = 5KHz$ et son amplitude, au niveau de la tension de sortie du filtre $s(t)$, sera multipliée par : $|\underline{H}(5\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+5^4}} \simeq \dfrac{1}{25}$, alors que l'amplitude du fondamental de $v(t)$ sera multipliée par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

• Le facteur d'atténuation de l'harmonique de rang 5 par rapport au fondamental sera donc de $\dfrac{\sqrt{2}}{25} \simeq 5,6\%$, ce qui est déjà correct : le caractère non sinusoïdal de $s(t)$ sera néanmoins visible.

• On peut alors songer à placer deux quadripôles de type précédent en cascade : en choisissant correctement les valeurs du coefficient α (en pratique, il faut deux valeurs différentes α_1 et α_2), il est possible d'obtenir une fonction de transfert telle que :

$|\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^8}} \Rightarrow$ on aura alors $|\underline{H}(5\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+5^8}} \simeq \dfrac{1}{625} \Rightarrow$ le facteur d'atténuation devient $0,2\%$ et le signal de sortie très bien « filtré ».

